ESTUDO DE SÓLITONS HIDRODINÂMICOS

Luís Henrique do Nascimento dos Santos[1]

lhbnascimento@gmail.com
Faculdade de Tecnologia de São Paulo

Regina Maria Ricotta

regina@fatecsp.br
Faculdade de Tecnologia de São Paulo

1. Introdução

Ao longo do século XX, o interesse por fenômenos não lineares aumentou significativamente, uma vez que se constatou que diversos sistemas físicos importantes eram modelados por equações diferenciais não lineares. Na natureza, existem ondas descritas por esse tipo de equações que, sob certas condições, possuem solução; o sóliton é um exemplo.

Os sólitons, conhecidos também como ondas solitárias, podem ser observados em diversas áreas, como fluidos, mecânica, óptica, estado sólido e biofísica. Neste trabalho, focaremos apenas nos sólitons hidrodinâmicos que se propagam na superfície de fluidos sob a influência de um campo gravitacional.

Em 1834, John Scott Russell observou uma onda solitária formada após o freio brusco de um barco em um canal. Ele notou que a onda mantinha sua forma e velocidade por longos trechos e, após experimentos, determinou que sua velocidade seguia proporcional à profundidade e à amplitude [1].

Posteriormente, Korteweg e De Vries confirmaram teoricamente a fórmula de Russell. Essa dedução ficou conhecida como a equação de Korteweg-de Vries (KdV).

Este trabalho aborda as definições necessárias para a compreensão de fenômenos ondulatórios, especialmente no contexto de sólitons hidrodinâmicos. O objetivo foi estudar a propagação dos sólitons em águas rasas.

2. Metodologia

A presente pesquisa fundamentou-se no estudo das ondas, com foco na propagação ao longo de uma única direção. No contexto das ondas unidimensionais, um dos exemplos mais clássicos e fundamentais é o de uma corda esticada, cujos pontos oscilam perpendicularmente ao seu comprimento [2]. Nesse cenário, o meio de propagação é restrito a uma única dimensão espacial.

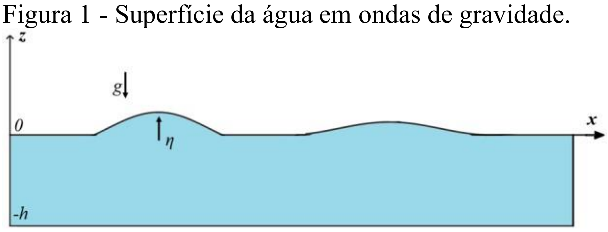
As equações da hidrodinâmica, como as equações de Euler e de Navier-Stokes, são fundamentais para descrever o comportamento de fluidos em movimento, servindo como base teórica para a compreensão de diversos fenômenos, incluindo ondas de gravidade, dispersão e efeitos não lineares. Essas equações governam a dinâmica dos fluidos, levando em conta fatores como a conservação de massa, quantidade de movimento e energia. Elas são importantes para a modelagem de ondas em superfícies de águas rasas, onde a interação entre dispersão e não linearidade desempenha um papel central.

No contexto de águas rasas, a dispersão descreve como diferentes componentes da onda viajam a

velocidades distintas, enquanto a não linearidade envolve a amplificação ou deformação da onda à medida que ela se propaga. Quando esses dois efeitos se equilibram, podem surgir estruturas estáveis como os sólitons, que são perturbações localizadas que se movem sem alterar sua forma e velocidade.

O movimento da onda ocorre através de perturbações na superfície da água, com o ar acima de sua interface em um campo gravitacional de módulo g. O líquido é limitado por uma superfície inferior rígida a uma profundidade h e o perfil da onda é definido como $\eta(x,t)$ = z, onde η representa a amplitude da onda em função da posição x e do tempo t, como mostrado na Figura 1, [3].

Figura 1 - Superfície da água em ondas de gravidade.



Fonte: Remoissenet, M. (1999) [3].

A partir das equações de Euler de mecânica dos fluidos na propagação de ondas de gravidade, a investigação considerou a água como fluido ideal, incompressível, irrotacional e sem viscosidade. Nessas condições e na aproximação de ondas de pequena amplitude em superfícies de águas rasas observa-se o fenômeno da dispersão, revelado pela perda de amplitude gradativa da onda. Quando a amplitude das ondas aumenta, efeitos de não linearidade do meio expressos nas equações da mecânica dos fluidos não podem ser negligenciados. A não linearidade faz com que partes diferentes da onda tenham velocidades diferentes acarretando um ganho de amplitude gradativo. A propagação de ondas de águas rasas fracamente não lineares e dispersivas pode ser modelada pela equação KdV, cuja solução é uma solitária do tipo sóliton.

3. Resultados e Discussões

As deduções e resoluções das equações diferenciais parciais possibilitaram a obtenção de soluções exatas ou aproximadas para as condições de contorno impostas. Dessa forma, pode-se demonstrar que, ao se considerar os efeitos da não linearidade e da dispersão, a relação de

dispersão da onda, representada por ω, é dada por

$$\omega \approx k c_0 \left(1 - \frac{k^2h^2}{6} + \frac{3\eta}{2h}\right), \qquad (1)$$

onde o primeiro termo em ω refere-se à onda livre, o segundo termo representa a dispersão da onda, proporcional ao número de onda k3, e o terceiro à não linearidade.

A relação de dispersão estabelece a ligação entre a frequência angular ω e o número de onda, definindo como as diferentes componentes de uma onda se propagam em função da frequência e do comprimento de onda.

Ao incluir a não linearidade, surgem comportamentos complexos, como a formação de sólitons ou ondas de choque, enquanto a dispersão se refere à variação da velocidade de fase com a frequência, resultando em diferentes velocidades para diferentes partes da onda. Esses fenômenos são fundamentais para entender a

propagação de ondas em diversos meios físicos.

Em uma descrição fenomenológica dos sólitons, a equação da onda associada a esta relação de dispersão (1), que descreve a propagação de ondas sem perdas em águas rasas é a equação de KdV, que na forma adimensional é dada por

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + 6\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0, \qquad (2)$$

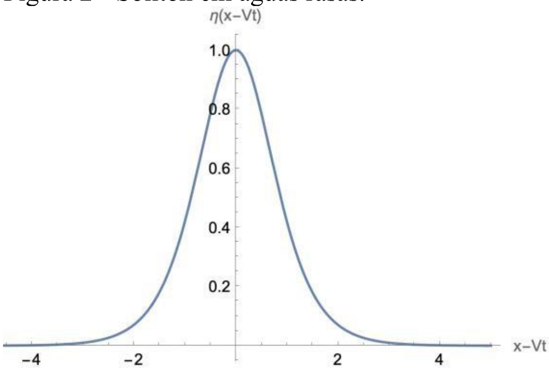
A solução da equação (2) é dada por

$$\eta(x - vt) = a_m \operatorname{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3a_m}{8h^3}}\,(x - vt)\right), \qquad (3)$$

onde v é a velocidade de propagação e am é a amplitude, chamada de número UrseIl, definida através da razão $(3\eta/2h)/(h^2k^2/6) \propto a_m/h^3k^2$. Esse número fornece uma medida da não linearidade em comparação com a dispersão, termos definidos na equação (1), [3].

A Figura 2 ilustra a solução sóliton em águas rasas.

Figura 2 - Sóliton em águas rasas.



Fonte: Elaboração dos autores.

4. Conclusões

Neste trabalho foi apresentado o estudo da propagação de ondas não lineares dispersivas em águas rasas. Através das equações da hidrodinâmica com as condições de contorno apropriadas, foi deduzida a equação de KdV, cuja solução são os chamados sólitons hidrodinâmicos.

Referências

[1] P. G. Drazin and R. S. Johnson, Solitons: an introduction, Cambridge University Press, 1996.

[2] Nussenzveig, Herch Moysés. Curso de física básica, 2: fluidos, oscilações e ondas, calor. 5. Ed. – São Paulo: Blucher, 2014.

[3] M. Remoissenet, Waves called solitons: Concepts and Experiments, Springer-Verlag, 1999.

[1] Aluno de IC com bolsa PIBIC CNPq.