

PARADOXO FERMI-PASTA-ULAM-TSINGOU

Guilherme da Silva Pereira

Fatec São Paulo - guisilva.pereira@hotmail.com

Regina Maria Ricotta

Fatec São Paulo - regina@fatecsp.br

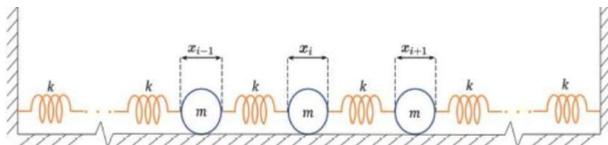
1. Introdução

O paradoxo Fermi - Pasta - Ulam - Tsingou (FPUT) surgiu em 1955 no estudo de um sistema dinâmico não linear, em que o objetivo era avaliar a evolução para o equilíbrio térmico. Trata-se de um sistema mecânico unidimensional massa-mola com N partículas em que a interação entre massas vizinhas é feita por forças lineares e não lineares. O paradoxo FPUT surge porque não se observa equipartição de energia nos modos de vibração, como acontece se a interação entre massas vizinhas for por forças lineares, ou seja, do tipo da Lei de Hooke, [1]. Estudos experimentais e simulações numéricas mostraram que a energia é redistribuída de forma não uniforme entre os modos, o que ficou conhecido como o paradoxo FPUT. No entanto, o sistema tem, no limite de pequena amplitude, solução exata dada por uma onda do tipo sóliton de Korteweg- De-Vries, KdV, que são ondas solitárias, localizadas, que se propagam por longas distâncias conservando sua configuração e velocidade iniciais, [2]. O objetivo deste trabalho é reproduzir a simulação do paradoxo na linguagem Python dos modos de vibração de energia deste sistema, a partir da energia total.

2. Metodologia

A Figura 01 ilustra o sistema unidimensional com N partículas de massas iguais a m ligadas por molas, formando uma rede fixa nas extremidades. A força entre os vizinhos mais próximos é tanto linear, como na Lei de Hooke com constante elástica k, quanto quadrática, não linear, com constante k_2 , [1].

Figura 01 – Sistema mecânico massa-mola com as partículas fixas nas extremidades.



Fonte: [1].

As massas se movem de acordo com a segunda lei de Newton ao longo da linha que as conecta, com interação entre os vizinhos mais próximos. A resultante de forças sobre a i-ésima partícula é dada por

$$F = m\ddot{x}_i = k_1\{(x_{i+1} - x_i) + (x_{i-1} - x_i) + k_2(x_{i+1} - x_i)^2 + (x_{i-1} - x_i)^2\} \quad (1)$$

onde \ddot{x}_i é a aceleração da i-ésima partícula, assim como a sua posição é x_i .

Supondo que as posições x_0 e x_{N+1} sejam as

paredes do sistema, a função Hamiltoniana, que descreve a energia, pode ser escrita como:

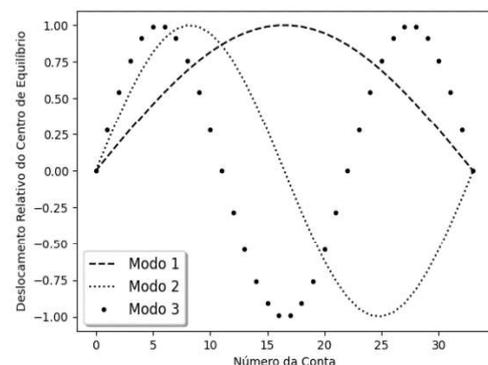
$$H = \sum_{i=0}^N \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i)^2 + \frac{\alpha}{3}(x_{i+1} - x_i)^3 \quad (2)$$

onde p_i é o momento da i-ésima partícula e α constante.

Essa equação da Hamiltoniana representa a energia total do sistema, que é a soma das energias cinéticas e potenciais. Na equação (2), o primeiro termo da esquerda corresponde à energia cinética de cada partícula, que depende da velocidade das partículas e é proporcional ao quadrado do momento das partículas. O segundo termo corresponde à energia potencial associada às molas lineares que conectam as partículas, e o terceiro termo corresponde à energia potencial associada às molas não lineares. Essa equação é fundamental para entender a dinâmica do sistema e pode ser utilizada para derivar as equações de movimento das partículas, que descrevem como a posição e o momento das partículas mudam ao longo do tempo. Além disso, essa equação permite calcular a energia total do sistema em qualquer momento.

É de se esperar que no equilíbrio térmico este sistema apresente a mesma energia, ou equipartição de energia, como no caso sem forças quadráticas em (1), $\alpha = 0$, para todos os modos de vibração, como demonstrado na Figura 02, o que não acontece. Este fato ficou conhecido como paradoxo FPUT.

Figura 02 – Demonstração dos três primeiros modos normais descritos pelo deslocamento relativo das partículas.

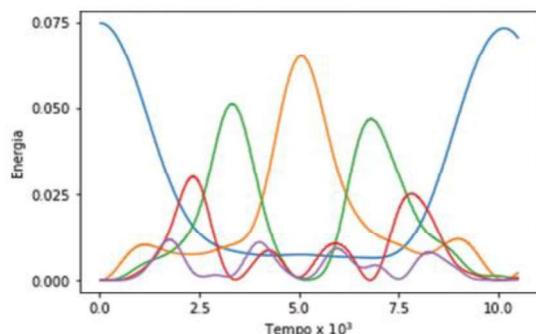


Fonte: [1].

3. Resultados e Discussões

A Figura 03 ilustra uma simulação realizada por FPUT e reproduzida na linguagem Python, como proposta em [1].

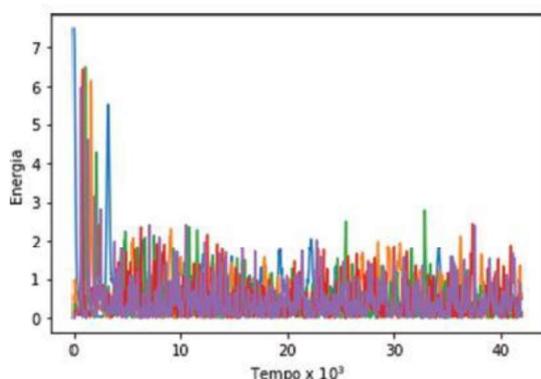
Figura 03 – Gráficos das energias nos cinco primeiros modos normais do sistema: 1º modo – azul; 2º modo – laranja; 3º modo – verde; 4º modo – vermelho; e 5º modo – lilás (no primeiro ciclo).



Fonte: Os autores.

Na simulação, o sistema foi inicializado com toda a energia no modo mais baixo de vibração (azul) e na expectativa de que a energia se dividisse igualmente entre todos os modos possíveis, observa-se que depois de serem compartilhados entre alguns modos de baixa ordem, uma fração muito grande da energia retorna mais tarde ao modo usado para inicializar o sistema, ou seja, a altura dos modos laranja e verde é muito maior que para os modos mais altos, o que configura o paradoxo.

Figura 04 – Gráficos das energias armazenadas nos cinco primeiros modos normais do sistema: 1º modo – azul; 2º modo – laranja; 3º modo – verde; 4º modo – vermelho; e 5º modo – lilás (no primeiro ciclo).



Fonte: Os autores.

Na Figura 03 é possível observar que a energia permanece equilibrada, mesmo à medida que ela transita entre os distintos modos normais do sistema, de forma que a perda de energia ao longo do tempo de simulação é

mínima. Isso ocorre porque a energia é preservada, já que se trata de um sólito atravessando o sistema. O código realiza então a transformada de Fourier das matrizes de posição e velocidade, obtendo a série de Fourier do deslocamento e da velocidade para cada partícula. São também definidas as variáveis necessárias para realizar a análise, como:

- o número de partículas;
- o número total de iterações realizadas na simulação;
- a iteração em que se obtém uma recorrência de primeira ordem;
- o timestep utilizado na simulação e as frequências de oscilação dos N modos normais.

As bibliotecas utilizadas tanto para a parte matemática como para os gráficos são Mathplotlib e Numpy respectivamente.

4. A solução do problema de FPUT

No estudo da solução da equação de movimento (1) com amplitude pequena comparada com o espaçamento da rede, podemos mostrar que no limite do contínuo a equação (1) se transforma em

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{24} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

onde a é o espaçamento da rede. A equação (3), conhecida como equação de KdV apresenta um termo de dispersão representado pela tripla derivada e um termo que representa a não-linearidade, que contém a constante α . Sua solução é conhecida como uma onda estável solitária, sólito, e é a base para a explicação do paradoxo FPUT, [2].

5. Conclusões

Estudado o sistema massa-mola com oscilações de baixa amplitude e com as interações ocorridas com a conexão com seus vizinhos mais próximos, foi possível observar o comportamento da distribuição de energia ocorrido no sistema. A partir disso houve a necessidade de desenvolver o estudo criterioso tanto no sistema linear como não linear, sendo então possível a observação da ligação com o sólito do tipo KdV durante a transmissão no sistema.

A resolução do paradoxo de FPUT auxiliou nos estudos de sistemas não lineares e complexos, como a teoria do caos e trouxe também avanço em simulações e desenvolvimento de problemas físicos.

6. Referências

- [1] D. M. LUCERO; MOREIRA, P. A. F. P., Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 43, 2021
- [2] DAUXOIS, T.; PEYRARD M., Physics of Solitons, Cambridge University Press, 2006.